OM EN EGENSKAB

VED

DE LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER MED TO VARIABLE.

VED

C. RAMUS.

Om en Egenskab ved de lineære Differentialligninger med to Variable.

1. Den lineære Differentialligning med to Variable x og y være fremstillet ved

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \ldots + P_n\, y = Q, \tag{1}$$

hvor P_1, $P_2, \ldots P_n$ og Q ere givne Functioner af x. Hertil svarer fölgende Integral af 1ste Orden *(intégrale première)*

$$\varphi \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \varphi_1 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \varphi_2 \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} \ldots + \varphi_{n-1} y = \int \varphi Q dx, \tag{2}$$

thi ved Differentiation erholdes igjen heraf den forelagte Ligning (1), forsaavidt som φ, φ_1, φ_2, $\ldots \varphi_{n-1}$ ere underkastede fölgende Betingelser: $\varphi' + \varphi_1 = P_1\varphi$, $\varphi'_1 + \varphi_2 = P_2\varphi$, $\varphi'_2 + \varphi_3 = P_3\varphi$, $\ldots$ $\varphi'_{n-2} + \varphi_{n-1} = P_{n-1}\varphi$, $\varphi'_{n-1} = P_n\varphi$, fölgelig

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= P_1\varphi - \varphi' \\
\varphi_2 &= P_2\varphi - \frac{d.\,P_1\varphi}{dx} + \varphi'' \\
\varphi_3 &= P_3\varphi - \frac{d.\,P_2\varphi}{dx} + \frac{d^2.\,P_1\varphi}{dx^2} - \varphi''' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{n-1} &= P_{n-1}\varphi - \frac{d.\,P_{n-2}\varphi}{dx} + \frac{d^2.\,P_{n-3}\varphi}{dx^2} \ldots + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}.\,P_1\varphi}{dx^{n-2}} + (-1)^{n-1}\varphi^{(n-1)} \\
P_n\varphi &= \frac{d.\,P_{n-1}\varphi}{dx} - \frac{d^2.\,P_{n-2}\varphi}{dx^2} + \frac{d^3.\,P_{n-3}\varphi}{dx^3} \ldots + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-1}.\,P_1\varphi}{dx^{n-1}} + (-1)^{n-1}\varphi^{(n)}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Den sidste af disse, tjenende til at bestemme φ, er lineær af Ordenen n og af fölgende Form:

$$\frac{d^n\varphi}{dx^n} + M_1 \frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}} + M_2 \frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}} \ldots + M_n\varphi = 0, \qquad (4)$$

idet

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= -P_1 \\
M_2 &= P_2 - \frac{n-1}{1}\frac{dP_1}{dx} \\
M_3 &= -P_3 + \frac{n-2}{1}\frac{dP_2}{dx} - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{d^2P_1}{dx^2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
M_{n-1} &= (-1)^{n-1}P_{n-1} + (-1)^{n-2}\frac{2}{1}\frac{dP_{n-2}}{dx} + (-1)^{n-3}\frac{3}{1}\frac{d^2P_{n-3}}{dx^2} \ldots - \frac{n-1}{1}\frac{d^{n-2}P_1}{dx^{n-2}} \\
M_n &= (-1)^n P_n + (-1)^{n-1}\frac{dP_{n-1}}{dx} + (-1)^{n-2}\frac{d^2P_{n-2}}{dx^2} \ldots + \frac{d^{n-2}P_2}{dx^{n-2}} - \frac{d^{n-1}P_1}{dx^{n-1}}.
\end{aligned}\right\} (5)$$

2. Den fuldstændige Integration af Ligning (1) er nu aabenbart reduceret til den af Ligning (4). Betegnes nemlig det fuldstændige Integral af Ligning (4) ved

$$\varphi = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 \ldots + C_n u_n,$$

hvor C_1, C_2, C_3, ... C_n ere de n arbitrære Constanter, vil Ligning (4) ogsaa være tilfredsstillet ved enhver af de n particulære Integraler

$$\varphi = u_1,\ \varphi = u_2,\ \varphi = u_3,\ \ldots\ \varphi = u_n, \qquad (6)$$

og det maa antages, at der mellem disse ikke findes to, som staae i et constant Forhold til hinanden. For enhver af Functionerne (6) blive ifölge Formlerne (3) φ_1, φ_2, ... φ_{n-1} bestemte, hvorved erholdes et Integral af 1ste Orden af (1) fremstillet ved Ligning (2). Altsaa erholdes ialt n Integraler af 1ste Orden af Formen (2), hvoraf ved Elimination af $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$ ... $\frac{dy}{dx}$ et Udtryk for y erholdes, som er det fuldstændige Integral af Ligning (1), indeholdende nemlig n arbitrære Constanter, og af Formen

$$y = \lambda_1 \int u_1 Q dx + \lambda_2 \int u_2 Q dx + \lambda_3 \int u_3 Q dx \ldots + \lambda_n \int u_n Q dx. \qquad (7)$$

Dette Udtryk er en symmetrisk Function af $u_1, u_2, \ldots u_n$, og ved Eliminationen mellem de samme Ligninger erholdes analoge symmetriske Udtryk for $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

3. Naar man for Ligning (2) kan finde et particulært Integral $y = z$, idet φ, hvoraf $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ afhænge ifölge (3), er en hvilkensomhelst Function, vil Ligning (1) ved Substitutionen $y = z$ umiddelbart transformeres til (4), saa at φ, bestemt ved fuldstændig Integration af (4) og indsat i z, giver $y = z$ som det fuldstændige Integral af (1). F. Ex. for $n = 1$ ere (1) og (2) disse

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y = Q, \quad \varphi y = \int \varphi Q dx, \qquad (8)$$

og (4) er

$$\frac{d\varphi}{dx} - P_1 \varphi = 0. \qquad (9)$$

Den anden (8) giver $y = \frac{1}{\varphi} \int \varphi Q dx$, og dette indsat i den förste giver (9), hvoraf ved Integration $\varphi = e^{\int P_1 dx}$. Dette indsat i den anden (8) giver det bekjendte fuldstændige Integral $y = e^{-\int P_1 dx} \int e^{\int P_1 dx} Q dx$. — For $n = 2$ ere (1) og (2) disse

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = Q, \qquad (10)$$

$$\varphi \frac{dy}{dx} + (P_1 \varphi - \varphi') y = \int \varphi Q dx. \qquad (11)$$

Da nu (11) er af 1ste Orden, kan den integreres ifölge det foregaaende Resultat, hvilket giver

$$y = e^{-\int P_1 dx} \varphi \int \frac{e^{\int P_1 dx}}{\varphi^2} (\int \varphi Q dx)\, dx. \qquad (12)$$

Ved at indsætte dette Udtryk i (10) erholdes den transformerte Ligning

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - P_1\frac{d\varphi}{dx} + \left(P_2 - \frac{dP_1}{dx}\right)\varphi = 0, \tag{13}$$

det samme, som haves ved i (4) at tage $n = 2$. Hvis der nu lod sig finde to particulære Integraler for Ligning (13) $\varphi = u_1$, $\varphi = u_2$, vilde det fuldstændige Integral af Ligning (10) erholdes ved i (12) at indsætte

$$\varphi = C_1 u_1 + C_2 u_2.$$

Eensgjældende hermed er ifölge (7)

$$y = \frac{u_2 \int u_1 Q dx - u_1 \int u_2 Q dx}{u_1 u'_2 - u_2 u'_1}.$$

4. Ligesom Ligning (1) ved Reduction har ledet til Ligning (4), saaledes vil denne igjen reduceres, hvorved erholdes

$$\frac{d^n\theta}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + P_2\frac{d^{n-2}\theta}{dx^{n-2}} \dots + P_n\,\theta = 0. \tag{14}$$

Naar nemlig i Formlerne (5) istedetfor P_1, P_2, $P_3 \dots P_n$, indsættes de ved samme Formler bestemte M_1, M_2, M_3, ... M_n, reduceres höire Side af disse Formler til P_1, P_2, P_3, ... P_n, saa at Ligning (14) bliver den til (4) svarende transformerte Ligning, paa samme Maade som (4) svarer til (1). For at bevise dette almindeligt bemærkes det almindelige Udtryk for M_t ifölge (5)

$$M_t = (-1)^t P_t + (-1)^{t-1}\frac{n-t+1}{1}\frac{dP_{t-1}}{dx} + (-1)^{t-2}\frac{(n-t+2)(n-t+1)}{1.2}\frac{d^2P_{t-2}}{dx^2} \dots - \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-t+1)}{1.2\dots(t-1)}\frac{d^{t-1}P_1}{dx^{t-1}}$$

Indsættes i höire Side af denne Formel M_1, M_2, ... M_t istedetfor P_1, P_2, ... P_t, erholdes Coefficienten for $\frac{d^{n-t}\theta}{dx^{n-t}}$ i den transformerte Ligning (14), nemlig

$$(-1)^t M_t + (-1)^{t-1}\frac{n-t+1}{1}\frac{dM_{t-1}}{dx} + (-1)^{t-2}\frac{(n-t+2)(n-t+1)}{1.2}\frac{d^2M_{t-2}}{dx^2} \dots - \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-t+1)}{1.2\dots(t-1)}\frac{d^{t-1}M_1}{dx^{t-1}},$$

som, naar Udtrykkene for M_t, M_{t-1}, M_{t-2}, ... M_1 indsættes, erholder Formen

$$P_t + q_1\frac{dP_{t-1}}{dx} + q_2\frac{d^2P_{t-2}}{dx^2} \dots + q_{t-1}\frac{d^{t-1}P_1}{dx^{t-1}},$$

idet $q_1, q_2, \dots q_{t-1}$ ere saaledes bestemte:

$$q_k = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{(n-t+k)(n-t+k-1)\dots(n-t+1)}{1.2\dots k} \\ + (-1)^{k-1} \dfrac{(n-t+k)(n-t+k-1)\dots(n-t+2)}{1.2\dots k-1} \cdot \dfrac{n-t+1}{1} \\ + (-1)^{k-2} \dfrac{(n-t+k)(n-t+k-1)\dots(n-t+3)}{1.2\dots k-2} \cdot \dfrac{(n-t+2)(n-t+1)}{1.2} \\ \cdot\;\cdot \\ - \dfrac{n-t+k}{1} \cdot \dfrac{(n-t+k-1)(n-t+k-2)\dots(n-t+1)}{1.2\dots k-1} \\ + \dfrac{(n-t+k)(n-t+k-1)\dots(n-t+1)}{1.2\dots k} \end{cases}$$

eller $q_k = (-1)^k \dfrac{(n-t+k)(n-t+k-1)\dots(n-t+1)}{1.2\dots k} \left[1 - \dfrac{k}{1} + \dfrac{k(k-1)}{1.2} \dots + (-1)^{k-1} \dfrac{k}{1} + (-1)^k\right]$

$$= (-1)^k \frac{(n-t+k)(n-t+k-1)\dots(n-t+1)}{1.2\dots k} (1-1)^k = 0.$$

Coefficienten for $\dfrac{d^{n-t}\theta}{dx^{n-t}}$ i Ligning (14) er altsaa P_t. Herved haves et nyt Beviis for *Lagranges* Theorem, ifölge hvilket Integrationen af Ligning (1) almindeligen reduceres til den af Ligning (14).

5. Naar man nu, saaledes som i Art. 3 er forudsat, kan finde et particulært Integral $y = z$ for Ligning (2), idet φ er hvilkensomhelst, vil man ved to successive Substitutioner kunne transformere Ligning (1) först til (4), dernæst til (14), eller man vil ved en eneste sammensat Substitution kunne umiddelbart transformere Ligning (1) til (14). F. Ex. for $n = 1$ vil Ligningen

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y = Q, \qquad (15)$$

ved at sætte

$$y = \frac{1}{\varphi} \int \varphi Q dx, \quad \varphi = \frac{1}{\theta}$$

eller ved umiddelbart at sætte

$$y = \theta \int \frac{Q}{\theta} dx, \tag{16}$$

blive transformeret til

$$\frac{d\theta}{dx} + P_1 \theta = 0. \tag{17}$$

For $n = 2$ haves

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = Q, \tag{18}$$

som ved at sætte

$$y = e^{-\int P_1 dx} \varphi \int \frac{e^{\int P_1 dx}}{\varphi^2} (\int \varphi Q dx) dx, \quad \varphi = e^{\int P_1 dx} \theta,$$

eller ved umiddelbart at sætte

$$y = \theta \int \frac{e^{-\int P_1 dx}}{\theta^2} (\int e^{\int P_1 dx} \theta Q dx) dx, \tag{19}$$

transformeres til

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + P_1 \frac{d\theta}{dx} + P_2 \theta = 0. \tag{20}$$

6. Naar $Q = 0$, have Ligningerne (1) og (14) aldeles den samme Form, eller Ligning (1) forbliver uforandret, naar for y substitueres dens Udtryk i θ. Hvis altsaa for θ tages et particulært Integral af Ligning (1), vil det nævnte Udtryk give et andet particulært Integral, eller det vil overhoved fremstille den Lov, hvorefter de particulære Integraler dannes af hinanden indbyrdes, hvilket som bekjendt er analogt med Beskaffenheden af Rödderne i visse algebraiske Ligninger. F. Ex. naar i (16) tages $Q = 0$, erholdes $y = \theta$, hvilket er evident, efterdi Ligningen $\frac{dy}{dx} + P_1 y = 0$ kun kan have et eneste particulært Integral. Sættes derimod i (19) $Q = 0$, erholdes $y = \theta \int \frac{e^{-\int P_1 dx}}{\theta^2} dx$, saa at, naar y_1 og y_2 betegne de to forskjellige particulære Integraler af Ligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2y=0,\tag{21}$$

kunne y_1 og y_2 dannes af hinanden saaledes

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int P_1dx}}{y_1^{\,2}}dx,\quad y_1=y_2\int\frac{e^{-\int P_1dx}}{y_2^{\,2}}dx.\tag{22}$$

Den förste af disse giver

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}+P_1\frac{dy_2}{dx}=\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+P_1\frac{dy_1}{dx}\right)\int\frac{e^{-\int P_1dx}}{y_1^{\,2}}dx,\tag{23}$$

og ligesaa den anden

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+P_1\frac{dy_1}{dx}=\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}+P_1\frac{dy_2}{dx}\right)\int\frac{e^{-\int P_1dx}}{y_1^{\,2}}dx.\tag{24}$$

Naar nu Integralerne indeholdte i (23) og (24) udtrykkes ved Hjælp af (22), erholdes

$$y_1\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}+P_1\frac{dy_2}{dx}\right)=y_2\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+P_1\frac{dy_1}{dx}\right),\tag{25}$$

som aabenbart er identisk og kan skrives $-P_2y_1y_2=-P_2y_1y_2$, thi ifölge (21) er

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+P_1\frac{dy_1}{dx}=-P_2y_1,\quad \frac{d^2y_2}{dx^2}+P_1\frac{dy_2}{dx}=-P_2y_2.\tag{26}$$

Ligningen (25), som kan udledes af (26) ved Elimination af P_2, er den samme som ifölge *Libris* Theorie tjener til at bestemme Coefficienten P_1 i Ligning (21) som symmetrisk Function af de to particulære Integraler y_1 og y_2. Udtrykkene (22) tilfredsstille altsaa det symmetriske Udtryk for P_1, og paa lignende Maade findes, at de tilfredsstille Udtrykket for P_2. Desuden erholdes af (22), som let sees ifölge (23) og (24),

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}+P_1\frac{dy_2}{dx}+P_2y_2=\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+P_1\frac{dy_1}{dx}+P_2y_1\right)\frac{y_2}{y_1},$$

hvilket tjener til Bekræftelse paa, at naar det ene af Udtrykkene y_1 eller y_2 er et particulært Integral af (21), er det andet det ogsaa. Naar foruden $Q=0$ tillige $P_1=0$, ere allerede (10) og (13) identiske, saa at ifölge (12) findes

$$y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}, \quad y_1 = y_2 \int \frac{dx}{y_2^2},$$

idet y_1 og y_2 ere de to particulære Integraler af

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_2\, y = 0,$$

hvilket er det samme, som udledes af (21) og (22) ved at tage $P_1 = 0$. Det fortjener endeligen at bemærkes, at da Udtrykkene for $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}$ ved Hjælp af φ, fremstilte i (3), indeholde P_1, P_2, ... P_{n-1}, men ikke P_n, vil Substitutionen, hvorved (1) transformeres til (4), ikke indeholde P_n. Ligesaa vil Substitutionen, hvorved (4) transformeres til (14), være uafhængig af M_n; og af (5) sees, at P_n alene indgaaer i M_n, men ikke i M_1, M_2, ... M_{n-1}. Altsaa vil ogsaa Udtrykket for φ i θ, hvorved (1) umiddelbart transformeres til (14), være uafhængigt af P_n. Heraf fölger, at den Relation, hvorved de particulære Integraler af (14) kunne udledes af hinanden indbyrdes, vil blot indeholde P_1, P_2, ... P_{n-1}, men i alle Tilfælde være uafhængig af P_n.

7. Foruden den her afhandlede Reduction af Ligning (1) til (14), som kræver Integration af den lineære Ligning af Ordenen $n-1$, kan endnu mærkes det enkelte Tilfælde hvor $\dfrac{Q}{P_n} = a$ er constant. Substitutionen er da ligefrem: $y = a + \theta$.